www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures

Les calculatrices programmables et alphanumériques sont autorisées, sous réserve des conditions définies dans la circulaire n°86-228 du 28 juillet 1986.

Notations et objectif

$\mathbb{C}$ désigne le corps des complexes.

Pour tout nombre réel α, on désigne par E_α le sous-espace vectoriel du $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,+\infty[$ à valeurs complexes constituées des fonctions f telles que $f(t)e^{-\alpha t}$ soit bornée. On désigne par F_α l'intersection des espaces E_β lorsque β prend toutes les valeurs réelles strictement supérieures à α. Enfin, on note C_α^∞ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions de classe C^∞ dans l'intervalle $]\alpha,+\infty[$.

A tout élément f de F_α, on fait correspondre la fonction L[f] définie sur $]\alpha,+\infty[$ par

$$L[f](s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt,$$

La première partie étudie des propriétés de L, la seconde partie envisage une application à la résolution d'un système différentiel linéaire à coefficients constants, enfin la troisième partie traite d'un problème de valeurs propres et de vecteurs propres dans l'espace des polynomes.

Les parties II et III sont INDEPENDANTES et peuvent être traitées en admettant les résultats établis au I.

PREMIERE PARTIE

I.1 Espaces E_α et F_α

a) Prouver que si $\alpha < \delta$, alors $E_\alpha \subset E_\delta$. En déduire que $E_\alpha \subset F_\alpha$. Prouver que si f est un élément de F_α et si s est un nombre réel supérieur strictement à α, alors $\lim_{t\to+\infty} e^{-st} f(t) = 0$.

b) On note u, u^n, e_γ (n est un entier positif et γ un nombre complexe) les fonctions définies respectivement sur $[0,+\infty[$ par : $u(t) = t$, $u^n(t) = t^n$, $e_\gamma(t) = e^{\gamma t}$.
Préciser pour chacune de ces fonctions, les nombres α tels que cette fonction soit élément de E_α.

c) Préciser de même le plus petit nombre α pour lequel une telle fonction soit élément de F_α.

I.2 Définition de L[f]

a) Quelles sont les valeurs du nombre réel γ pour lesquelles l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\gamma t}\, dt$, est convergente ? Déterminer la valeur de cette intégrale lorsqu'elle est convergente.

b) Soit β un nombre réel donné et f un élément de E_β. Montrer que, pour tout s appartenant à $]\beta,+\infty[$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt$, est absolument convergente.

c) Soit α un nombre réel donné et f un élément de F_α. Prouver que pour tout $s > \alpha$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt$ est absolument convergente.

Ainsi est définie sur $]\alpha,+\infty[$ la fonction L[f] par $L[f](s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt$.

d) Calculer L[u] et $L[e_\gamma]$.

Tournez la page S.V.P.

I.3 Continuité de L[f]

Soit f un élément donné de F_α, on lui associe la suite (ϕ_n) de fonctions définies sur $]\alpha,+\infty[$ par $\phi_n(s) = \int_0^n e^{-st} f(t)\, dt$.

a) Prouver que chacune des fonctions ϕ_n est continue.

b) Soit s_0 un élément donné de $]\alpha,+\infty[$ et ß un élément de $]\alpha,s_0[$. Montrer qu'il existe un nombre réel M positif tel que pour tout t de $[0,+\infty[$ et pour tout $s \geq s_0$, $\left| e^{-st} f(t) \right| \leq M e^{-(s_0-\beta)t}$. En déduire la convergence uniforme de la suite (ϕ_n) vers L[f] sur un intervalle que l'on précisera.

c) Prouver que la fonction L[f] est continue sur $]\alpha,+\infty[$.

I.4 Dérivabilité de L[f]

a) Soit f un élément donné de F_α, montrer que pour tout entier n positif, la fonction $u^n f$ (c'est-à-dire $t \longmapsto t^n f(t)$) est un élément de F_α.

b) Prouver que, pour tout n, ϕ_n est élément de C_α^∞.

c) Soit $s_0 > \alpha$, montrer que, pour tout entier r positif, la suite $(D^r\phi_n)$ des dérivées d'ordre r converge uniformément sur $[s_0,+\infty[$ vers une fonction que l'on déterminera.

d) En déduire que L[f] est élément de C_α^∞ et que, pour tout r entier positif, on a :

$$D^r L[f] = (-1)^r L[u^r f]$$

Ainsi, l'application $f \mapsto L[f]$ est une application linéaire de F_α dans C_α^∞.

I.5 Transformation des exponentielles polynômes

Soit α un nombre réel donné, on désigne par ξ_α l'espace vectoriel engendré par les fonctions

$$t \mapsto e^{\gamma t} P(t) \text{ (la variable t appartenant à } [0,+\infty[\text{),}$$

γ décrit l'ensemble des nombres complexes de partie réelle inférieure ou égale à α et P décrit l'ensemble des fonctions polynômiales complexes.

a) Prouver que $\xi_\alpha \subset F_\alpha$ et que ξ_α est stable par dérivation et par multiplication par e_ω où ω est un nombre complexe de partie réelle négative.

b) En utilisant les résultats précédents, déterminer $L[e_\gamma u^r]$ où r est un entier donné. Montrer que $L[e_\gamma P]$, où P est un polynôme, est une fraction rationnelle R dont on précisera le pôle.

Prouver que si $R(s) = 0$, quel que soit $s > \alpha$, alors R est la fraction nulle ; en déduire alors que P est le polynôme nul.

c) Prouver que la restriction à ξ_α de l'application L est injective.

I.6 Transformation d'une dérivée

a) Soit f un élément de F_α, de classe C^1 sur $[0,+\infty[$ et dont la dérivée f' appartient également à F_α, prouver que, pour tout $s > \alpha$,

$$L[f'](s) = s\, L[f](s) - f(0)$$

b) r étant un entier positif, on suppose que f est de classe C^r sur $[0,+\infty[$ et que f, f', f",.....,$f^{(r)}$ sont des éléments de F_α, généraliser la relation précédente à $L[f^{(r)}]$.

Tournez la page S.V.P.

DEUXIEME PARTIE

APPLICATION A LA RESOLUTION D'UN SYSTEME DIFFERENTIEL

On se propose de trouver le couple (y_1, y_2) de fonctions de la variable t, solution sur $[0,+\infty[$ du système différentiel linéaire :

$$(S)\begin{cases} y'_1 + y'_2 = y_1 - y_2 + 3\,e^{2t} \\ y''_1 + y'_2 = 2\,e^{2t} \end{cases}$$

et qui vérifie les conditions initiales :

$$y_1(0) = 0 \quad , \quad y'_1(0) = -1 \quad , \quad y_2(0) = 1$$

II.1 Supposons qu'il existe un réel α tel que y_1, y_2 et leurs dérivées y'_1, y'_2, y''_1 ainsi que e_2 soient dans F_α, et posons :

$$Y_1 = L[y_1] \quad , \quad Y_2 = L[y_2]$$

a) Former alors le système linéaire S^* vérifié par $Y_1(s)$ et $Y_2(s)$ où s est un nombre réel de l'intervalle $]\alpha,+\infty[$.

b) Résoudre le système précédent S^*.

II.2

a) Prouver qu'il existe α tel que les deux fonctions Y_1 et Y_2 trouvées précédemment soient les images par L de deux fonctions de ξ_α.

b) Justifier alors l'hypothèse faite au paragraphe II-1 et donner sous forme complexe, puis sous forme réelle, les expressions de y_1 et y_2, solutions sur $[0,+\infty[$ du système (S) vérifiant les conditions initiales.

TROISIEME PARTIE

APPLICATION A L'ETUDE D'UN OPERATEUR

On note $\mathcal{P}$ l'espace vectoriel complexe des polynômes muni d'un produit scalaire (hermitien) défini par :

$$(P/Q) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\ \overline{P(t)}\ Q(t)\ dt$$

avec $\overline{P(t)}$ le polynôme complexe conjugué de P(t).

On considère l'endomorphisme U de $\mathcal{P}$ qui associe à tout élément P de $\mathcal{P}$ le polynôme U(P) défini par :

$$U(P)(t) = e^t D(t\,e^{-t}P'(t))$$

où D désigne l'opérateur de dérivation et P' la dérivée D(P) de P.

Tournez la page S.V.P.

III.1 Montrer que, pour tout couple (P,Q) d'éléments de $\mathcal{P}$, (U(P)/Q) = (P/U(Q)). En déduire que les valeurs propres de U, si elles existent, sont réelles. En déduire également que si P et Q sont deux vecteurs propres de U associés à deux valeurs propres distinctes, alors P et Q sont orthogonaux.

III.2

a) Soient λ une valeur propre de U et P un vecteur propre associé, prouver que P est une solution de l'équation différentielle :

$$t\,y'' + (1 - t)\,y' - \lambda\,y = 0$$

b) En exprimant qu'un polynôme de degré n est solution de cette équation, montrer que nécessairement λ est égal à un entier négatif que l'on précisera.

III.3 Recherche des vecteurs propres

On se place dans l'espace vectoriel ξ_1 et on considère sur $[0,+\infty[$ l'équation :

$$t\,P'' + (1 - t)\,P' + n\,P = 0$$

a) En appliquant à cette équation la transformation L, montrer que g = L[P] vérifie sur l'intervalle $]1,+\infty[$ une équation différentielle d'ordre 1 que l'on précisera.

b) Résoudre cette équation et en déduire g(s) à une constante multiplicative près.

c) Déduire de ce qui précède que -n est valeur propre de U quelque soit l'entier positif n et déterminer les polynômes propres h_n associés.

d) Vérifier en utilisant l'application L qu'une famille de polynômes propres peut être définie par la formule :

$$h_n(t) = e^t D^n (e^{-t} t^n)$$

III.4 Propriétés des h_n

a) Prouver l'orthogonalité des polynômes $h_n(t)$ et $h_m(t)$ pour tout couple (n,m) d'entiers distincts.

b) Calculer la norme $\| h_n \|$, en déduire alors une base orthonormale de l'espace $\mathcal{P}$.

Fin de l'énoncé

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail